CHAPITRE 4 : Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique ou magnétique

Le mouvement des particules chargées dans un champ électrique et/ou magnétique est un sujet important du fait du grand nombre d'applications qui l'utilisent. On se limite aux champs uniformes et indépendants du temps qui ne dépendent ni de la position dans l'espace ni de l'instant considérés. Le but de ce chapitre est de comprendre comment les particules chargées se meuvent lorsqu'elles sont plongées dans un champ électromagnétique. On exclut tout développement relativiste, ce qui implique que la vitesse des particules soit négligeable devant la vitesse de la lumière. Cette condition est restrictive car les particules accélérées par des champs électriques peuvent facilement atteindre des vitesses proches de celle de la lumière.

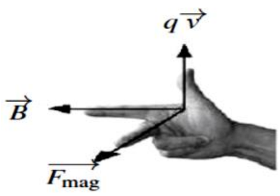
1. Force de Lorentz

1.1. Définition

Une particule chargée de masse m, de charge q animée d'une vitesse $\vec{v}$ subit en présence d'un champ électrique $\vec{E}$ et d'un champ magnétique $\vec{B}$, la force de Lorentz dont on rappelle l'expression :

$$\boxed{\vec{f} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right)}$$

Où $\vec{E}$, $\vec{B}$ et $\vec{v}$ dépendent du référentiel. Cette force qui ne s'applique qu'aux particules chargées, est composée d'un terme électrique $q\vec{E}$ et d'un terme magnétique $q\vec{v} \wedge \vec{B}$. La force électrique $\vec{F}_{elec}$ est alignée avec le champ électrique $\vec{E}$. Elle a le même sens si la charge q de la particule est positive et un sens opposé si q est négative. Pour trouver la direction de la force magnétique $\vec{F}_{mag}$, on utilise la règle de la main droite (l'ensemble $\left(q\vec{v}, \vec{B}, \vec{f}\right)$ forme un trièdre direct). Tout comme la force électrique, elle change de sens lorsque le signe de la charge change.



1.2. Différence fondamentale entre la composante électrique et la composante magnétique

Du point de vue de la mécanique, une différence fondamentale existe entre les deux composantes de la force de Lorentz : la force magnétique ne peut accéléré une particule

- la force magnétique est toujours orthogonale à la vitesse. Sa puissance et donc son travail sont nuls. Le théorème de l'énergie cinétique implique que l'énergie cinétique d'un corps soumis uniquement à ce type de force est conservée. Ainsi, la force magnétique ne peut agir que sur la direction du mouvement.
- la force électrique peut délivrer une puissance à une particule chargée. Elle est capable de la mettre en mouvement et de modifier son énergie cinétique. La force électrique peut agir à la fois sur la norme et sur la direction de la vitesse.

La force électrique permet d'accélérer ou de freiner une particule chargée. La force magnétique ne peut que la dévier.

1.3. Ordre de grandeur et conséquences

1.3.1. Unités et ordre de grandeur des champs électriques et magnétiques

La valeur des champs magnétiques et électriques peut balayer plusieurs ordres de grandeur et il est bon d'avoir en tête que :

- le champ électrique se mesure en volt par mètre ($1\ \mathrm{V.m^{-1}} = 1\ \mathrm{kg.m.}s^{-3}.A^{-1}$). **Un champ electrique de l'ordre de $10^6\ \mathrm{V.m^{-1}}$ est un champ intense qui peut provoquer la formation d'etincelles dans l'air.**
- le champ magnétique se mesure en Tesla ($1\ \mathrm{T} = 1\ \mathrm{kg.}s^{-2}.A^{-1}$). Il prend usuellement des valeurs comprises entre 5.10^{-5} T pour le champ magnétique terrestre et 30 T pour le champ magnétique intense d'un spectroscope à résonance magnétique (R.M.N). Les aimants usuels produisent des champs magnétiques de l'ordre de 0,1 T.

1.3.2. Comparaison au poids de la particule

On peut toujours négliger le poids d'une particule chargée soumise à un champ électromagnétique.

2. Mouvement dans un champ électrique uniforme

On s'intéresse dans un premier temps au mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique seul.

2.1. Equation du mouvement

On étudie le mouvement de la particule dans le référentiel du laboratoire. On assimile cette particule à un point matériel M de masse m et de charge q et on considère le référentiel du laboratoire comme galiléen. La particule est soumise à :

- la force électrique : $\vec{f} = q\vec{E}$
- son poids que l'on néglige.

On applique le principe fondamental de la dynamique qui s'écrit :

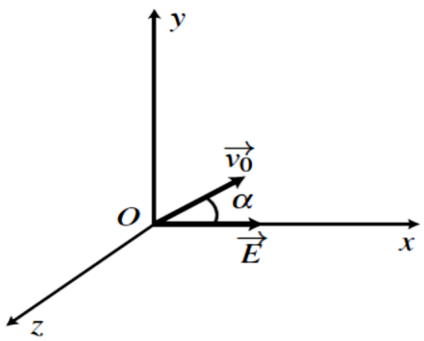
$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Longrightarrow q\vec{E} = m\vec{a} \Longrightarrow \vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m}$$

2.2. Etude de la trajectoire

Le champ $\vec{E}$ étant indépendant du temps, on peut intégrer vectoriellement soit :

$$\vec{v} = \frac{q\vec{E}}{m}t + \vec{v}_0 \Longrightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\frac{q\vec{E}}{m}t^2 + \vec{v}_0 t$$

En prenant comme origine O la position initiale de la particule.



Le mouvement a lieu dans le plan défini par la position initiale, le champ électrique et le vecteur vitesse initial. Ceci n'a rien de surprenant : la seule force qui s'exerce sur la particule est dans ce plan. On remarque l'analogie avec le mouvement d'un point matériel dans le champ de pesanteur : dans les deux cas, la force appliquée est constante et uniforme.

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\frac{q\vec{E}}{m}t^2 + \vec{v}_0 t \Longrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{qE}{2m}t^2 + v_0 t\cos\alpha \\ y = v_0 t \sin\alpha \\ z = 0 \end{cases}$$

La trajectoire s'obtient en éliminant le temps t dans les relations précédentes ; le plus simple est d'obtenir t en fonction de y. On doit donc distinguer deux cas : le cas où $\alpha = 0$ ou π et le cas où $\alpha \neq 0$. C'est-à-dire le cas où la vitesse initiale est parallèle au champ électrique et celui où elle ne lui est pas parallèle.

2.2.1. Trajectoire lorsque la vitesse initiale est parallèle au champ

Dans ce cas, $\sin\alpha = 0$ et $\cos\alpha = 1$ si $\alpha = 0$ et $\cos\alpha = -1$ si $\alpha = \pi$. La loi horaire du mouvement devient :

$$\begin{cases} x = \dfrac{qE}{2m}t^2 \pm v_0 t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

ce qui correspond à un mouvement rectiligne le long de l'axe (Ox).

2.2.2. Trajectoire lorsque la vitesse initiale n'est pas parallèle au champ

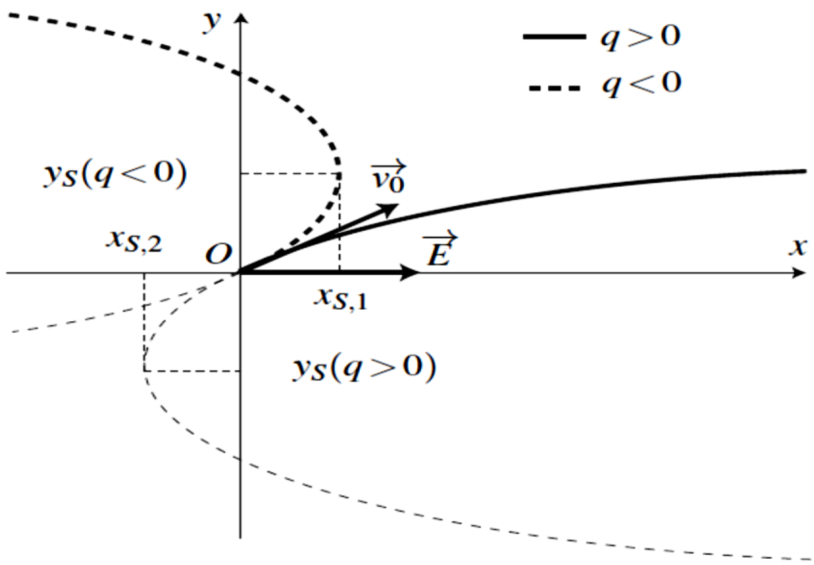
Dans ce cas, $\alpha \neq 0$ et $\sin\alpha \neq 0$. On peut alors diviser par $v_0 \sin\alpha$ et obtenir :

$$t = \frac{y}{v_0 \sin\alpha}$$

En reportant dans l'équation horaire de x, on en déduit :

$$x = \frac{qE}{2mv_0^2 \sin^2\alpha} y^2 + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} y$$

Les trajectoires sont des paraboles passant par l'origine. Ces trajectoires sont caractérisées par leur sommet qui correspond à un extremum de x.



On cherche donc les valeurs de y qui annulent la dérivée $\dfrac{dx}{dy}$:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{qE}{mv_0^2 \sin^2\alpha} y + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x_S = -\dfrac{mv_0^2\cos^2\alpha}{2qE} \\ y_S = -\dfrac{mv_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{qE} \end{cases}$$

2.3. Accélération d'une particule chargée par un champ électrique

2.3.1.Etude générale

On s'intéresse ici aux aspects énergétiques afin de montrer qu'un champ électrique peut modifier la norme de la vitesse d'une particule chargée.

Expression de l'énergie potentielle

Le champ électrique $\vec{E}$ est supposé uniforme. La force électrique conservative et dérive d'une énergie potentielle $E_P(x)$ telle que :

$$\delta W(\vec{f}) = \vec{f}.d\overrightarrow{OM} = q\vec{E}.d\overrightarrow{OM} = qE\,\vec{u}_x.d\overrightarrow{OM} = qEdx = -dE_P \Longrightarrow E_P = q(-Ex + C)$$

où C est une constante arbitraire.

On définit le potentiel électrique noté V par la relation :

$$\boxed{\boldsymbol{E_P = qV \Longrightarrow V = \frac{E_P}{q}}}$$

Lorsque le champ électrique est uniforme, dirigé selon (Ox) et d'expression $\vec{E} = E\,\vec{u}_x$, le potentiel électrique V est une fonction linéaire de x de dérivée $-E$.

$$V(x) = -Ex + C$$

Le potentiel électrique V qui est défini ici, ne dépend pas de la charge q mais uniquement du champ électrique E. Le choix de la constante arbitraire C correspond au choix de la position du potentiel electrique nul (référence de potentiel) et donc au choix de la masse en électricité.

Le champ électrique est toujours dirigé vers les potentiels décroissants. En effet :

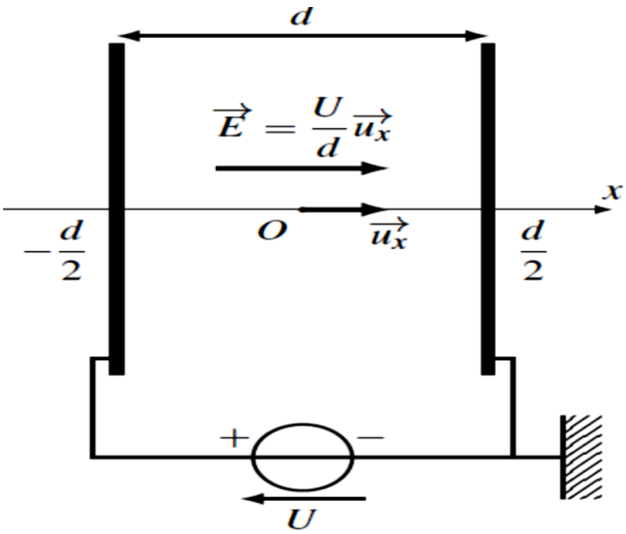
- si $E > 0$, $V(x)$ est une fonction decroissante de x et le champ $\vec{E}$ est dirigé dans le sens des x croissants
- si $E < 0$, $V(x)$ est une fonction croissante de x et le champ $\vec{E}$ est dirigé dans le sens des x décroissants.

Remarque : la force électrique est conservative même si le champ électrique n'est pas uniforme. On peut alors définir un potentiel électrique mais son expression n'est plus la même.

Production d'un champ électrique

En appliquant une différence de potentiel U entre deux grilles (ou électrodes) planes paralleles et distants de d, on obtient un champ électrique perpendiculaire aux grilles dirigé vers les potentiels décroissants et de norme :

$$\boxed{\boldsymbol{E = \frac{U}{d}}}$$



2.3.2.Conservation de l'énergie mécanique

La seule force étant la force électrique qui est conservative, le théorème de l'énergie mécanique implique la conservation de l'énergie mécanique d'où :

$$\boxed{\boldsymbol{E_m = E_C + E_P = \frac{1}{2}mv^2 + qV = cte}}$$

en indiquant par l'indice i la situation initiale et par f la situation finale, on en deduit la variation d'energie cinetique :

$$\Delta E_C = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = -q\left(V\left(x_f\right) - V(x_i)\right)$$

Pour faire varier l'énergie cinétique et donc la norme de la vitesse d'une particule chargée soumise uniquement à une force électromagnétique, il faut lui faire franchir une différence de potentiel ΔV. La variation de l'énergie cinétique est dans ce cas :

$$\boxed{\boldsymbol{\Delta E_C = -q\Delta V}}$$

- Si $q > 0$, la particule sera accélérée par une différence de potentiel $\Delta V < 0$ et freinée par une différence de potentiel $\Delta V > 0$.

- Si $q < 0$, la particule sera accélérée par une différence de potentiel $\Delta V > 0$ et freinée par une différence de potentiel $\Delta V < 0$.

2.3.3.Cas particulier où la vitesse initiale est nulle

Dans ce cas, le mouvement est nécessairement rectiligne et accéléré. Le sens de la force $\vec{f} = q\vec{E}$ dépend du signe de la charge considerée.

- **Accélération de particules chargées positivement :** On injecte une particule de charge positive sans vitesse initiale à proximité de l'électrode positive **:** $x_i = -d/2$. Elle est accélérée vers les x croissants jusqu'à l'électrode négative : $x_f = d/2$. L'énergie cinétique finale s'exprime en fonction de la différence de potentiel

$$V(x_f) - V(x_i) = V\left(\frac{d}{2}\right) - V\left(-\frac{d}{2}\right) = -U \Rightarrow \frac{1}{2}mv_f^2 = qU \Rightarrow v_f = \sqrt{\frac{2qU}{m}}$$

où la différence de potentiel U est appelée tension accélératrice.

- **Accélération de particules chargées négativement :** On injecte une particule de charge négative sans vitesse initiale à proximité de l'électrode négative **:** $x_i = d/2$. Elle est accélérée vers les x décroissants jusqu'à l'électrode positive : $x_f = -d/2$. L'énergie cinétique finale s'exprime en fonction de la différence de potentiel

$$V(x_f) - V(x_i) = V\left(-\frac{d}{2}\right) - V\left(\frac{d}{2}\right) = U \Rightarrow \frac{1}{2}mv_f^2 = -qU \Rightarrow v_f = \sqrt{\frac{-2qU}{m}}$$

3. Mouvement dans un champ magnétique

On s'intéresse au mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme. Lorsque la vitesse de la particule est initialement perpendiculaire au champ magnétique, on observe expérimentalement qu'elle suit une trajectoire circulaire. On veut expliquer cette trajectoire et déterminer son rayon.

3.1. Le mouvement est uniforme

On étudie le mouvement d'une particule de charge q et de masse m dans un champ magnetique uniforme $\vec{B}$ de norme B. À l'instant initial, la particule est animée d'une vitesse initiale $\vec{v}_0$ de norme v_0 et de direction perpendiculaire à $\vec{B}$. On modélise la particule par un point matériel M et on étudie son mouvement dans le référentiel du laboratoire considéré comme galiléen. La particule est soumise aux forces suivantes :

- la force magnétique : $\vec{f} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$

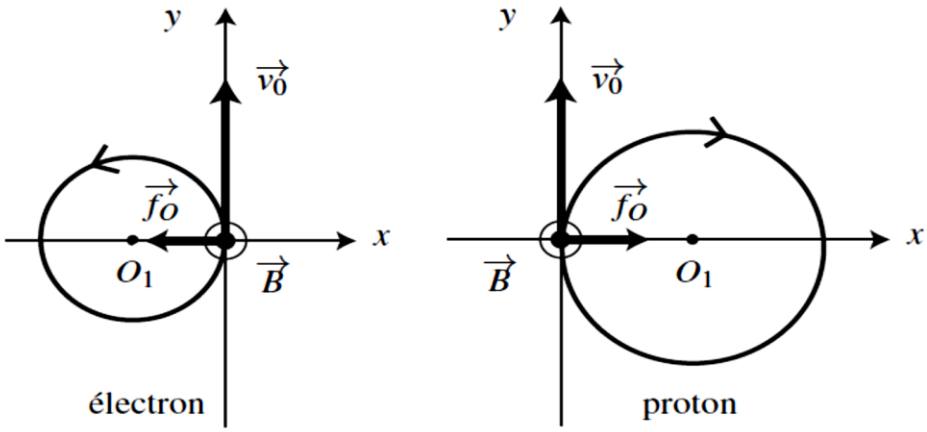
- son poids qui sera négligé compte tenu des ordres de grandeurs

Dans un premier temps, on s'intéresse uniquement à la norme de la vitesse et on utilise le théorème de l'énergie cinétique. La force magnétique étant perpendiculaire à la vitesse à chaque instant, sa puissance, et par conséquent son travail, sont nuls. L'application du théorème de l'énergie cinétique : $\Delta E_C = W(\vec{f}) = 0$ montre que l'énergie cinétique de la particule est une constante du mouvement. Par conséquent, le module de sa vitesse conserve sa valeur initiale v_0. **Le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique est uniforme.**

3.2. Etude de la trajectoire

3.2.1.Observations expérimentales

La trajectoire des particules est circulaire dans un plan perpendiculaire à $\vec{B}$. Le sens de parcours et la position du centre de la trajectoire dépendent du signe de la charge.



3.2.2.Détermination du rayon et de la vitesse angulaire

On applique le PFD :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

On peut étudier cette trajectoire en coordonnées polaires d'origine O_1 confondue avec le centre de la trajectoire et d'axe (O_1z) orienté par $\vec{B}$. On a montré précédemment que le mouvement est uniforme à la vitesse v_0, on utilise donc les résultats sur le mouvement circulaire et uniforme établis dans le chapitre de cinématique du point soit :

$$\overrightarrow{O_1M} = R\vec{u}_r \ ; \quad \vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta = \pm v_0\vec{u}_\theta \ ; \quad \vec{a} = -\frac{v_0^2}{R}\vec{u}_r$$

A ce niveau le sens de rotation n'est pas déterminé, ce qui explique la notation $\vec{v} = \pm v_0\vec{u}_\theta$. L'accélération est dirigée selon $-\vec{u}_r$ (elle est toujours dirigée vers l'intérieur de la trajectoire).

La force magnétique étant la seule force, elle est nécessairement parallèle et de même sens que l'accélération d'après le PFD. Cela permet de raisonner sur les normes. Les vecteurs $q\vec{v}$ et $\vec{B}$ sont perpendiculaires entre eux et de norme respectives $|q|v_0$ et B donc $\|q\vec{v} \wedge \vec{B}\| = |q|v_0 B$. Par ailleurs $\|\vec{a}\| = v_0^2/R$. Le PFD conduit ensuite à :

$$m\frac{v_0^2}{R} = |q|v_0 B \Longrightarrow v_0 = \frac{|q|B}{m}R$$

On note $\omega_c = \dfrac{|q|B}{m}$ cette pulsation qui se nomme pulsation cyclotron. La relation entre le rayon et la vitesse v_0 devient alors :

$$\boldsymbol{v_0 = R\omega_c \Longrightarrow R = \frac{v_0}{\omega_c}}$$

Une particule de charge q et de vitesse initiale $\vec{v}_0$ perpendiculaire à un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ suit un mouvement circulaire et uniforme à la vitesse angulaire $\omega_c = \dfrac{|q|B}{m}$ appelée pulsation cyclotron. On trouve le rayon de la trajectoire grâce à la relation $v_0 = R\omega_c$.

Remarque : lorsque la vitesse initiale n'est pas perpendiculaire au champ magnétique, le mouvement est hélicoïdal, composé d'un mouvement rectiligne et uniforme dans la direction de $\vec{B}$ et d'un mouvement circulaire et uniforme dans le plan perpendiculaire à $\vec{B}$.

3.2.3. Position du centre de la trajectoire-sens de parcours de la trajectoire

On peut tracer la trajectoire dans le cas d'une injection de particule en O avec la vitesse $\vec{v}_0$. On oriente pour cela l'axe (Oy) selon $\vec{v}_0$. La droite (Oy) est alors une tangente à la trajectoire. L'axe (Ox), perpendiculaire à (Oy) est donc un diamètre de la trajectoire. La force magnétique est nécessairement dirigée vers le centre de la trajectoire circulaire. Sa direction au passage en O avec une vitesse $\vec{v}_0$ permet donc de situer le centre O_1 de la trajectoire :

$$\vec{f}_0 = q\vec{v}_0 \wedge \vec{B} = qv_0\vec{u}_y \wedge B\vec{u}_z = qv_0 B\vec{u}_x$$

On en déduit que :

- pour une charge positive, $\vec{f}_0$ est dirigé selon $+\vec{u}_x$ donc O_1 a une abscisse positive
- pour une charge négative, $\vec{f}_0$ est dirigé selon $-\vec{u}_x$ donc O_1 a une abscisse négative.

La connaissance du rayon de la trajectoire permet alors de situer son centre et de la tracer. La vitesse en O permet ensuite de déduire le sens de parcours de la trajectoire. Il faut noter que le sens du mouvement circulaire dépendent du signe de la charge q : les électrons tournent dans le sens direct autour du champ $\vec{B}$ et les protons dans le sens indirect.

Exercice d'application

On considère des particules préalablement accélérés par une différence de potentiel de 2000 V. Un proton possède la vitesse $v_0 = 6{,}2.10^5\, m.s^{-1}$ et un électron la vitesse $v_0 = 2{,}7.10^7\, m.s^{-1}$. Lorsqu'on les soumet à un champ magnétique de $0{,}10\, T$, ces particules de charge $|q| = e = 1{,}6.10^{-19} C$ suivent des trajectoires circulaires.

1. Déterminer le rayon des différentes trajectoires pour chacune des particules. On note que la masse du proton est $m_P = 1{,}67.10^{-27} kg$ et celle de l'electron $m_e = 9{,}1.10^{-31} kg$

2. Que vaut les vitesses angulaires pour le proton et pour l'électron. Conclure

4. Quelques applications de ces mouvements

On considère quelques applications des mouvements de particules dans des champs électrique et magnétique. La liste est loin d'être exhaustive et on se limite à l'analyse de quelques expériences intéressantes.

4.1. Spectromètre de masse

Le but d'un spectromètre de masse est d'analyser les ions présents dans un faisceau. On peut utiliser leurs différences de masse pour connaître leur proportion respective en supposant que leur charge est connue. Le montage utilisé comprend deux phases :

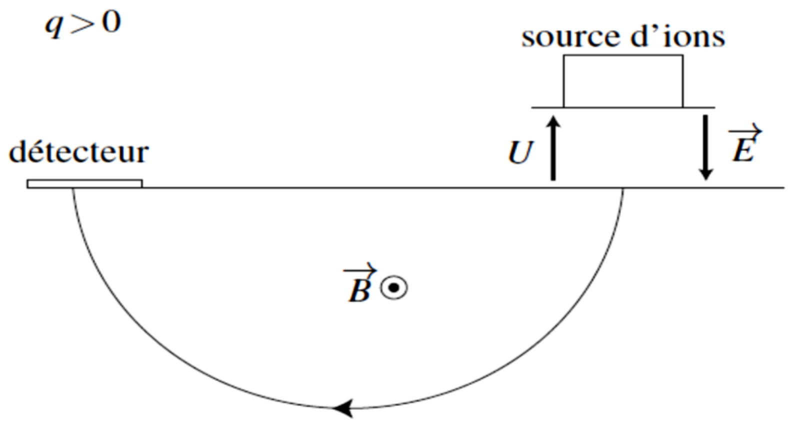
- **Phase accélératrice** : on commence par accélérer les ions grâce à une forte différence de potentiel. L'application du théorème de l'énergie cinétique aux ions supposés initialement au repos fournit leur vitesse à la fin de cette phase :

$$v = \sqrt{\frac{2|q|U}{m}}$$

  On se place cependant dans la limite classique en vérifiant que $v \ll c$ pour eviter un traitement relativiste.

- **Phase de déviation** : on applique alors un champ magnétique $\vec{B}$ perpendiculaire au mouvement. En appliquant les relations établies précédemment, on peut affirmer que les ions décrivent une trajectoire circulaire de rayon $R = \frac{mv}{|q|B}$. On en déduit :

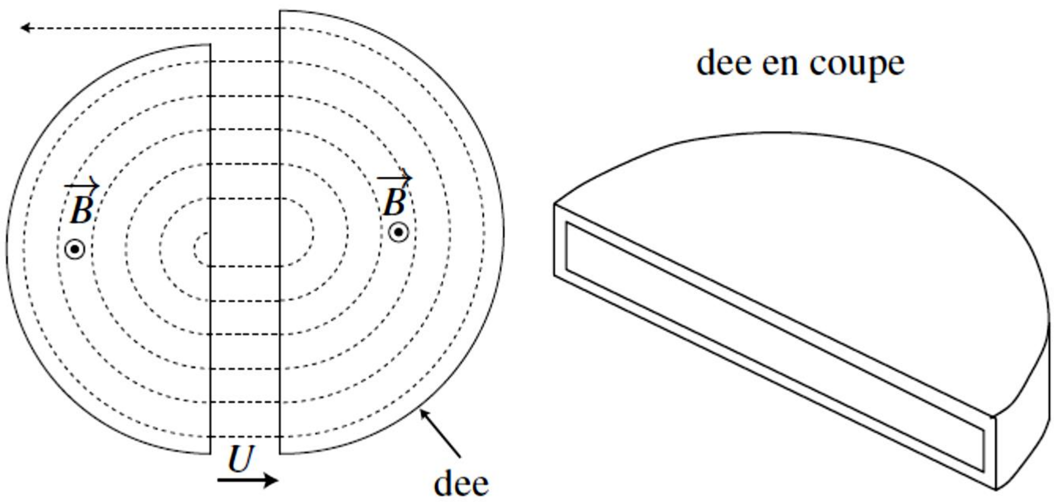
$$v=\frac{qBR}{m}=\sqrt{\frac{2|q|U}{m}}\Longrightarrow\frac{q^2B^2R^2}{m^2}=\frac{2|q|U}{m}\Longrightarrow\frac{|q|}{m}=\frac{2U}{B^2R^2}$$



L'impact sur le détecteur permet de connaitre le rayon de la trajectoire et donc le rapport $\frac{q}{m}$ connaissant la tension accélératrice U et la norme du champ magnétique $\vec{B}$. Ce système permet de séparer des éléments ionisés en fonction de leur masse et de leur charge. Si on connait par ailleurs la charge des ions, on peut en déduire leur masse. Ceci explique le nom de spectromètre de masse donné à ce dispositif.

4.2. Cyclotron

L'existence d'une trajectoire circulaire des particules chargées soumises à un champ magnétique permet d'envisager des accélérateurs de particules agissant de manière cyclique. C'est le principe des cyclotrons dont le dispositif est le suivant :



Ils sont constitués de deux demi-cylindres creux dénommées ***dees*** du fait de leur forme de ***D*** majuscules. Chaque dee est soumis à un champ magnétique uniforme, le sens du champ magnétique est le même dans les deux dees. Les deux dees sont séparés par un espace dans lequel on applique une différence de potentiel U. Dans chaque dee, la particule suit un mouvement circulaire lié au champ magnétique. Sa vitesse angulaire vaut :

$$\omega = \omega_c = \frac{qB}{m}$$

C'est la pulsation cyclotron dont on peut déduire la fréquence cyclotron :

$$f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{qB}{2\pi m}$$

Quand la particule traverse l'interstice entre les deux dees, elle est accélérée par la présence de la différence de potentiel U. Pour qu'elle soit effectivement accélérée à chaque demi-tour, il faut que les tensions aux instants correspondant à deux passages successifs dans l'interstice soient en opposition de phase. Sinon elle pourra être alternativement accélérée et décélérée. Pour obtenir une telle tension, il suffit de prendre une tension sinusoïdale dont la période est celle du cyclotron. De cette manière, le rayon de la trajectoire augmente à chaque traversée de l'interstice puisqu'il est proportionnel à la vitesse. On obtient alors le type de trajectoire indiquée en pointillé sur la figure précédente. L'intérêt d'un tel dispositif est de pouvoir accélérer très fortement les particules sans être contraint d'appliquer une différence de potentiel énorme.